SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

EQUAZIONI DI EULERO NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

7 MAGGIO 1987

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di Clarke e Vinter [6], [7] sulla regolarità delle soluzioni del problema

(P) $$\min\{\int_a^b L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \,\Big|\, x(\cdot) \text{ assol. continua},$$

$$x(a) = A \ , \ x(b) = B\}.$$

Già Tonelli [8] si era posto il problema di provare la validità delle condizioni di Eulero-Lagrange per le soluzioni del problema (P) sotto le sue più generali condizioni di esistenza ed aveva provato che tali condizioni sono soddisfatte fuori di un sottoinsieme chiuso C di misura nulla. Tonelli è tornato più volte sull'argomento, ottenendo diverse condizioni che assicurano che C è vuoto oppure che si riduce a uno degli estremi dell'intervallo [a,b], cfr. [9], [10], [11]. In [10] compare per la prima volta un esempio in cui $C \neq \emptyset$.

Questo esempio non era noto a Ball-Mizel [2] quando hanno ripreso la questione nel 1984 e hanno costruito una serie di esempi di problemi (P) per i quali si ha $C \neq \emptyset$. Fra l'altro hanno mostrato che C può essere un arbitrario sottoinsieme chiuso di misura nulla dell'intervallo [a,b].

Clarke e Vinter [6], [7] hanno esteso i risultati di Tonelli e di altri (cfr. [6]) combinando le tecniche di Tonelli con l'uso del calcolo differenziale generalizzato di Clarke [4].

1. Supponiamo che la funzione

$$L:[a,b] \times R^n \times R^n \to R$$

verifichi le condizioni

(H1) L è localmente limitata, $t \to L(t,x,v)$ è misurabile per ogni (x,v) e $v \to (t,x,v)$ è convessa per ogni (t,x);

(H2) per ogni C limitato in $R^n x R^n$ esiste una costante K tale che

$$|L(t,x,v)-L(t,x',v')| \leq K|(x-x',v-v')|$$

per ogni t in [a,b] e (x,v), (x',v') in C;

(H3) esistono una costante α e una funzione convessa $\theta:[0,+\infty[\to R$ tale che

$$L(t,x,v) \geq -\alpha|x|+ \theta(|v|), \text{ per ogni } t,x,v,$$

$$\frac{\theta(|v|)}{|v|} \xrightarrow[|r|\to\infty]{} \infty.$$

Teorema 1. Sotto le condizioni (H1), (H2) e (H3) il problema (P) ha una soluzione $x(\cdot)$. Sia $a \leq \tau \leq b$ tale che

$$(1) \qquad \liminf_{\substack{s,t \to \tau \\ s\leq\tau\leq t \\ s \neq t}} \frac{|x(t)-x(s)|}{t-s} < \infty.$$

Allora

a) esiste un intervallo I relativamente aperto in [a,b] tale che $\tau\in I$, $x(\cdot)$ è lipschitziana su I ed esiste $p(\cdot)$: $I \to R$ assolutamente continua per cui riesce

$$(2) \qquad (\dot{p}(t),p(t))\in\partial_{x,v} L(t,x(t), \dot{x}(t)) \qquad \text{q.d. su } I;$$

b) se inoltre la funzione $v \to L(t,x(t),v)$ è strettamente convessa per ogni t e la funzione $s \to L(s,x(t),v)$ è continua per s = t e per ogni v, allora $x(\cdot)\in C^1(I)$;

c) se L verifica tutte le condizioni precedenti e inoltre è di classe C^r in un intorno di $(t,x(t),\dot{x}(t))$, con $r\geq 2$, e $L_{vv}(t,x(t),\dot{x}(t)>0$ [definita positiva] per

ogni t in [a,b], allora $x(\cdot)\in C^r(I)$.

Abbiamo indicato con $\partial_{x,v}L$ il gradiente generalizzato di $L(t,\cdot,\cdot)$. Ricordiamo che, per f localmente lipschitziana, si ha

$\partial f(x)$ = involucro convesso dell'insieme

$\{\text{grad } f(x_i) \mid x_i \to x \text{ per } i\to\infty\}$

Per le proprietà del gradiente generalizzato si veda [4]. Ricordiamo che se f è di classe C^1 in un intorno di x, allora $\partial f(x) = \{\text{grad} f(x)\}$. Pertanto, se $L(t,\cdot,\cdot)$ è di classe C^1 e se $x(\cdot)\in C^1(I)$, da (2) segue

$$(2') \qquad \frac{d}{dt}\text{grad}_v L(t,x(t),\dot{x}(t)) = \text{grad}_x L(t,x(t),\dot{x}(t)),$$

quasi ovunque su I.

Prima di occuparci della dimostrazione del Teorema 1 vediamo alcune conseguenze.

<u>Corollario 1.</u> Esiste un sottoinsieme Ω di [a,b] aperto relativamente ad [a,b] tale che $\dot{x}(\cdot)$ è localmente limitata su Ω e $[a,b]\setminus\Omega$ ha misura nulla.

Questo segue dal fatto che $x(\cdot)$ è derivabile q.d. su [a,b] e quindi vale (1) q.d.

<u>Corollario 2.</u> Se L verifica le condizioni in b), allora esiste il limite (finito o no)

$$\lim_{\substack{s,t\to\tau \\ s\le\tau\le t \\ s\neq t}} \frac{|x(t)-x(s)|}{t-s}$$

per ogni τ in $[a,b]$.

Corollario 3. Se L verifica le condizioni in b) e $n = 1$, allora esiste il limite (finito o no)

$$\lim_{t\to\tau} \frac{x(t)-x(\tau)}{t-\tau} = \dot{x}(\tau)$$

per ogni τ in $[a,b]$.

Il Corollario 3 contiene il Teorema di Tonelli citato in precedenza.

Per la dimostrazione dei corollari si veda [6].

Indichiamo i punti principali della dimostrazione del Teorema 1, seguendo [6].

I) L'esistenza segue dal Teorema 4.1.3. di [4].

II) Sia τ come in (1). Allora esistono $c \in R^n$ e le successioni $i \to s_i \leq \tau \leq t_i$ tali che $s_i < r$ se $a < \tau$, $t_i > \tau$ se $\tau < b$, $s_i < t_i$ e

$$\frac{x(t_i)-x(s_i)}{t_i-s_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} c$$

Posto $x(t) - tc = x_1(t)$, $x_1(\cdot)$ risolve un problema di tipo (P) con un'altra funzione L che soddisfa ancora lo stesso tipo di condizioni. Inoltre si ha ora $c = 0$.

III) Si può modificare la funzione θ e si può sostituire alla funzione L una del tipo

$$\max\{L(t,y,v),\ -\alpha M + \theta\ |v|\}$$

in modo da conservare la validità delle ipotesi (H1), (H2), (H3) e in più da avere

(H4)

i) $\alpha = 0$ in (H3);

ii) $c = 0$ in II);

iii) $0 \leq \theta(r) \leq r^2$, θ è crescente, θ è strettamente convessa per τ abbastanza grande

IV) Fissiamo

$$M > \max\{|x(t)| \mid a \leq t \leq b\}$$

e poniamo

$$S = \{(t,y) \mid a \leq t \leq b,\ |y| \leq M\},$$

$$c_0 = \sup\{|L(t,y,0)| \mid (t,y) \in S\}$$

Fissiamo $R_0 > 0$ tale che θ sia strettamente convessa su $[R_0, +\infty[$ e inoltre $\theta(R_0) > 2(1+c_0)$.

Poniamo

$$\sigma_0 = \sup\{|z| \mid z \in \partial_v L(t,y,v), (t,y) \in S,\ |v| \leq R_0\}$$

e fissiamo $R_1 > R_0$ tale che riesca

$$\theta(r) > 2r[1 + \sigma_0 + \frac{c_0}{R_1}] \quad \text{per } r \geq R_1.$$

Poniamo

$$c_1 = \sup\{|L(t,y,v)| \mid (t,y)\in S,\ |v|\leq R_1]$$

$$\sigma_1 = \sup\{|z| \mid z\in \partial_v L(t,y,v),\ (t,y)\in S,\ |v| \leq R_1\}$$

e fissiamo $R_2 > R_1$ tale che

$$\theta(R_2) > 2(c_1 + 2\ R_2\ \sigma_1).$$

Poniamo

$$\phi(v) = \frac{1}{2}\max\{\theta(|v|),\ \theta(R_2)\},$$

$$\tilde{L}(t,y,v) = \inf\{(1-r)\phi(w)+rL(t,y,u) \mid 0\leq\tau\leq 1,\ |u|\leq R_2,$$
$$v = (1-r)\ w+ru\}$$

Allora si ha la seguente

<u>Proposizione 1.</u> Se $(t,y)\in S$, allora $t\to\tilde{L}(t,y,v)$ è misurabile, $v \to \tilde{L}(t,y,v)$ è convessa, $(y,v) \to \tilde{L}(t,y,v)$ è localmente lipschitziana e per ogni $z\in \partial_{y,v}\tilde{L}(t,y,v)$ si ha

$$|z| \leq K_1 + K_2\ |v|$$

per certe costanti K_1 e K_2. Si ha inoltre

a) $\tilde{L}(t,y,v)\geq \frac{1}{2}\theta(|v|)$,

b) $|v|\leq R_1 \Rightarrow \tilde{L}(t,y,v) = L(t,y,v)$,

c) $R_1<|v|\leq R_2\Rightarrow \tilde{L}(t,y,v) \leq L(t,y,v)$,

d) $R_2<|v|\Rightarrow\tilde{L}(t,y,v) = \frac{1}{2}\,\theta(|v|) < \theta(|v|) \le L(t,y,v)$,

e) se $|v| \ge R_1$ e $z\in\partial_v\tilde{L}(t,y,v)$, allora

$$|z| > 1 + \sigma_0 .$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [6].

V) Consideriamo ora il problema

$$(P_i) \qquad \min\{\int_{s_i}^{t_i} \tilde{L}(t,y(t),\dot{y}(t))dt \,|\, y(\cdot) \text{ ass. continua, } y(s_i) = x(s_i),\; y(t_i) = x(t_i)\}$$

Questo problema ha una soluzione $x_i(\cdot)$.
Posto

$$z_i(t) = x(s_i) + \frac{t-s_i}{t_i-s_i}\,[x(t_i)-x(s_i)],$$

$$\tilde{J}_i(y) = \int_{s_i}^{t_i} \tilde{L}(t,y,\dot{y})dt \quad , \quad J_i(y) = \int_{s_i}^{t_i} L(t,y,\dot{y})dt,$$

si ha

$$\tilde{J}_i(x_i) \le \tilde{J}_i(z_i) \le J_i(z_i)$$

e quindi, dalla Proposizione 1,

$$\frac{1}{2}\int_{s_i}^{t_i} \theta(|\dot{x}_i(t)|\,dt \le J_i(z_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Di qui e dalle maggiorazioni precedenti la Proposizione 1 segue

$$\sup_{s_i \leq t \leq t_i} |x_i(t) - x(s_i)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} o$$

e quindi, per qualche I_o,

$$|x_i(t)| < M \quad \text{per } s_i \leq t \leq t_i \quad , \quad i \geq I_o,$$

ossia $(t,x_i(t)) \in S$ per $i \geq I_o$.

Per la Proposizione 1, al problema (P_i) è applicabile il Teorema 4.2.2. di [4] in base al quale esiste $y_i(\cdot):[si,ti] \to R^n$ assolutamente continua tale che, per $i \geq I_o$ opportuno,

$$(-\dot{p}_i(t),\ \dot{x}_i(t)) \in \partial_{x,p} H(t,x_i(t),\ p_i(t)) \quad \text{q.d.}$$

con l'Hamiltoniana H data da

$$H(t,x,p) = \sup\{\langle p,v\rangle - \tilde{L}(t,y,v)|\ v \in R^n\}.$$

Di qui, usando la Proposizione 1 ripetutamente, si ottengono le valutazioni, per $i \geq I_1$ opportuno,

$$|\dot{p}_i(t)| \leq \text{costante} \quad \text{q.d.},$$

$$\dot{x}_i(t) \in \partial_p H(t,x_i(t),\ p_i(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$p_i(t) \in \partial_v \tilde{L}\ (t,x_i(t),\ \dot{x}_i(t)),$$

$$|x_i(t)| \leq R_1 \quad \text{q.d.},$$

$$\mathfrak{J}_i(x_i) = J_i(x_i).$$

Siccome $x(\cdot)$ risolve (P_i), si ha

$$J_i(x) \leq J_i(x_i)$$

e quindi si ha

$$\mathfrak{J}_i(x_i) \leq \mathfrak{J}_i(x) \leq J_i(x) \leq J_i(x_i) = \mathfrak{J}_i(x_i)$$

e quindi

$$\mathfrak{J}_i(x) = J_i(x).$$

A causa della Proposizione 1, di qui segue

$$|\dot{x}(t)| \leq R_2 \text{ per } s_i \leq t \leq t_i, \; i \geq I_1.$$

E' noto [4] che sotto questa condizione vale l'affermazione a) del Teorema 1.

VI) Ci mettiamo ora nelle ipotesi del Teorema 1-b). Fissiamo $R>R_2$ e consideriamo il problema

$$(P_i') \qquad \min\{\int_{s_i}^{t_i} L(t,y(t),\dot{y}(t))dt \,|\, y(\cdot) \text{ass.continua}, \; |\dot{y}(t)| \leq R \;\; \text{q.d.},$$

$$y(s_i) = x(s_i), \; y(t_i) = x(t_i)\}, \quad i \geq I_1,$$

di cui $x(\cdot)$ è soluzione, per quanto visto sopra. Per questo problema valgono le condizioni generalizzate di Hamilton ([4], Teor. 4.2.2.)

$$(-p(t),\dot{x}(t)) \in \partial_{x,p} H(t,x(t),p(t)) \quad \text{q.d. su } [s_i, t_i],$$

con $p(\cdot)$ assolutamente continua e

$$H(t,x,p) = \max\{\langle p,v\rangle - L(t,x,v) \mid |v| \leq R\}.$$

Ne segue che

$$\dot{x}(t) \in \partial_p(H(t,x(t), p(t)) \quad \text{q.d.}$$

e quindi che $\dot{x}(t)$ massimizza la funzione

$$v \to \langle p(t),v\rangle - L(t,x(t), v) = f(t,v), \; |v| \leq R.$$

La funzione $f(t,\cdot)$ è strettamente concava e perciò assume il massimo $m(t)$ in un solo punto $v(t)$. Siccome f è continua, le due funzioni $m(\cdot)$ e $v(\cdot)$ sono continue (cfr. [1], Teor. 6, pag. 53).

Siccome $\dot{x}(t)$ esiste q.d., coincide q.d. con $v(t)$ ed è limitata e siccome $v(\cdot)$ è continua, si ha che $\dot{x}(t)$ esiste dappertutto e coincide con $v(t)$. Questo prova l'affermazione b).

VII) Mettiamoci ora nelle ipotesi c). Ora la (2) si può scrivere così

$$\dot{p}(t) = L_x(t,x(t), \dot{x}(t)) \quad , s_i \leq t \leq t_i \quad , \quad i \geq I_1,$$

$$p(t) = L_v(t,x(t), \dot{x}(t))$$

e $p(\cdot)$ e $\dot{p}(\cdot)$ sono continue, dunque $p(\cdot)$ è di classe C^1 e quindi si può applicare il teorema di Dini sulle funzioni implicite per ricavare $\dot{x}(\cdot)$ come funzione di classe C^1, se $r = 2$, e di classe C^{r-1} in generale.

2. Vedremo al n. 4 che può essere $\Omega \neq [a,b]$. Qui vogliamo indicare alcune condizioni sufficienti a precisare Ω.

In tutto il n. 2 supporremo sempre tacitamente soddisfatta la condizione

(H_2') L è localmente lipschitziana su $[a,b] \times R^n \times R^n$.

Teorema 2. Sulla soluzione $x(\cdot)$ del problema (P) valgono le affermazioni

a) se L non dipende da t, allora $\Omega = [a,b]$;

a') se per ogni aperto limitato $S \subset R^n$ esistono una costante c e una funzione $\gamma \in L^1$ tali che

$$L_t(t,x,v) \leq c|L(t,x,v)| + \gamma(t)$$

in ogni punto $(t,x,v) \in]a,b[x S x R^n$ in cui la funzione $L(\cdot,\cdot,v)$ è differenziabile, allora si ha $\Omega \supset [a,b[$; se vale la maggiorazione precedente con $-L_t$ al posto di L_t, allora si ha $\Omega \supset]a,b]$;

a") se esiste $\gamma \in L^1$ tale che per ogni $(\lambda_t,\lambda_x) \in \partial_{t,x} L(s,x(s),\dot{x}(s))$ riesca

$$\lambda_t \leq \gamma(s) \quad \text{q.d. su } [a,b],$$

allora si ha $\Omega \supset [a,b[$; se invece riesce $\lambda_t \geq \gamma(s)$ per quasi ogni s in $[a,b]$, allora $\Omega \supset]a,b]$;

b) se per ogni aperto limitato $S \subset R^n$ esistono le costanti c_1 e c_2 e la funzione $\gamma \in L^1$ tali che

$$|L_x(t,x,v)| \leq c_1|L(t,x,v)| + c_2|L_v(t,x,v)| + \gamma(t)$$

in ogni punto $(t,x,v) \in]a,b[xSxR^n$ in cui $L(t,\cdot,\cdot)$ è differenziabile, allora $\Omega = [a,b]$;

b') se esistono una costante $c \geq 0$ e $\gamma \in L^1$ tali che riesca per ogni $\lambda_x \in \partial_x L(t,x(t), \dot{x}(t))$ e $\lambda_v \in \partial_v L(t,x(t),\dot{x}(t))$

$$|\lambda_x| \leq c\ |\lambda_v| + \gamma(t) \quad \text{q.d. in } [a,b],$$

allora si ha $\Omega = [a,b]$.

<u>Teorema 3.</u> Supponiamo $L \in C^2([a,b] \times R^n \times R^n)$ e

$$L_{vv}(t,x(t),\dot{x}(t)) > 0 \qquad \text{q.d. su } [a,b] \ .$$

Poniamo

$$F = L_{vv}^{-1}\,(L_x - L_{vt} - L_{vx}v).$$

a) Se esiste $\gamma \in L^1$ tale che

$$|F(t,x(t),\dot{x}(t))| \leq \gamma(t)(1+|\dot{x}(t)|) \quad \text{q.d.},$$

allora $\Omega = [a,b]$.

b) Se per ogni (t,x,v) si ha

$$L(t,x,v) \geq g(x) + k|v|^{1+\alpha},$$

$$L_{vv}(t,x,v) > 0$$

con $\alpha \geq 0$, $k > 0$ e g localmente limitata, se per ogni aperto limitato $S \subset R^n$ esiste una costante c tale che

$$|F(t,x,v)| \leq c(1+|v|^{2+\alpha})$$

per ogni (t,x,v) in $[a,b]xSxR^n$, allora $\Omega = [a,b]$.

Le dimostrazioni di tutte le affermazioni contenute nei Teoremi 2 e 3 si basano sul seguente

Lemma 1. Sia $u(\cdot)$ soluzione del problema (P) con L che soddisfa le condizioni (H1), (H2), (H3). Per $t \in \Omega \cap [a,b]$ poniamo

$$t^* = \sup\{t \in]\bar{t},b] \mid \|\dot{x}(\cdot),L^\infty(\bar{t},t)\| < \infty\}.$$

Allora $x(\cdot)$ è lipschitziana su $[\bar{t},b]$ se vale almeno una delle seguenti due ipotesi:

(i) $\|\dot{x}(\cdot), L^\infty(\bar{t},t^*)\| < \infty$

(ii) Per ogni successione $i \to t_i$ tale che

$$\bar{t} \leq t_i < t_{i+1} \to t^* \quad \text{per } i \to \infty$$

esiste una successione di funzioni $p_i(\cdot):[\bar{t},t_i]\to R^n$ assolutamente continue ed esiste una costante K indipendente da i tale che

$$p_i(t) \in \partial_v L(t,x(t),\dot{x}(t)) \qquad \text{q.d. su } [\bar{t},t_i] \;,$$

$$|p_i(t)| \leq K \qquad \text{per } \bar{t} \leq t \leq t_i .$$

Per le dimostrazioni dei Teoremi 2 e 3 e del Lemma 1 rimandiamo a [6].

Indichiamo soltanto come l'affermazione a) del Teorema 2 segue dal Lemma.

Fissiamo $\bar{t} \in \Omega \cap [a,b[$ e prendiamo t_i e t^* come nel Lemma 1. Per ogni $i \geq 1$ si ha

$$1 + \|\dot{x}(\cdot),\ \overset{\infty}{L}(\bar{t},t_i)\| = M_i < \infty$$

e quindi $x(\cdot)$ è soluzione su $[\bar{t},t_i]$ del seguente problema

$$\min\{\int_{\bar{t}}^{t_i} L(y(t),\dot{y}(t))dt \,|\, y(\cdot) \text{ ass.continua},\ y(\bar{t}) = x(\bar{t}),\ y(t_i) = x(t_i),$$

$$|\dot{y}(t)| \leq M_i \quad \text{q.d.}\}.$$

Per il Teorema 5.2.3 di [4] esiste una funzione $p_i(\cdot): [\bar{t},t_i] \to R$ assolutamente continua, non identicamente nulla e tale che

$$\dot{p}_i(t) \in \partial_x L(x(t),\dot{x}(t)) \qquad \text{q.d. su } [\bar{t},t_i],$$

$$h_i = p_i(t)\cdot\dot{x}(t) - L(x(t),\dot{x}(t)) = \max_{|v| \leq M_i} [p_i(t)\cdot v - L(x(t),v)] \quad ,$$

con h_i = costante.

Per la convessità di $L(x,\cdot)$ e poiché $M_i > |\dot{x}(t)|$, di qui segue

$$p_i(t) \in \partial_v L(x(t),\dot{x}(t)) \qquad \text{q.d.}$$

e quindi che

$$h_i = p_i(t)\cdot\dot{x}(t) - L(x(t),\dot{x}(t)) \geq p_i(t)\cdot v - L(x(t),v), \quad \forall v \in R^n.$$

Ne segue

$$p_i(t)\cdot v \leq L(x(t),v) + h_i \quad , \quad \forall v\in R^n,$$

e quindi

$$|p_i(t)| = \max_{|v|\leq 1} |p_i(t)\cdot v| \leq \max_{|v|\leq 1} |L(x(t),v)| + |h_i|$$

Per le ipotesi fatte su L, il primo termine a secondo membro si maggiora con una costante indipendente da $t\in[a,b]$.

Si ha poi, per certe costanti K_n,

$$|\dot{x}(t)| \leq M_1-1 \qquad \text{q.d. su}[\bar{t},t_1],$$

$$|L(x(t),\dot{x}(t))| \leq K_1 \qquad \text{q.d. su}[\bar{t},t_1],$$

$$|p_i(t)| \leq K_2 \qquad \text{"} \qquad ,$$

ricordando che $p_i(t)\in\partial_v L(x(t),\dot{x}(t))$ e che L è localmente lipschitziana. Ne segue che

$$|h_i| \leq \frac{1}{t_1-\bar{t}} \int_{\bar{t}}^{t_1} |p_i(t),\dot{x}(t) - L(x(t),\dot{x}(t))|dt \leq K_3 \quad \text{per} \quad i \geq 1$$

e quindi

$$|p_i(t)| \leq K_4 \quad \text{per} \quad \bar{t} \leq t \leq t_i \quad , \quad i \geq 1$$

Ora si applica il Lemma e si ottiene che

$$\Omega \supset [\bar{t},b],$$

applicando anche il Teorema 1.

In modo analogo si prova che $\Omega \supset [a,\bar{t}]$.

3. Vogliamo esporre ora un risultato di esistenza in piccolo che non richiede l'ipotesi di coercività (H3).

Teorema 4. Sia $(t_0,x_0)\in S$ aperto in $R \times R^n$ tale che

i) L è localmente lipschitziana su $S \times R^n$,

ii) $R^n \ni v \to L(t,x,v)$ è strettamente convessa per ogni (t,x) in S.

Fissato $M > 0$, esistono ε,γ positivi arbitrariamente piccoli tali che, qualunque siano a, b, A, B verificanti le condizioni

$$a,b\in [t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon],\quad a < b,$$

$$|A-x_0| \leq \varepsilon,\ |B-x_0| \leq \varepsilon,$$

$$|B-A| \leq M(b-a),$$

il problema

$$\min\{\int_a^b L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \mid x(\cdot) \text{ ass.continua, } x(a) = A,$$

$$x(b) = B,\ |x(t)-x_0| \leq \gamma \text{ per } a\leq t\leq b\}$$

ha almeno una soluzione e ogni soluzione è di classe C^1 su $[a,b]$.

Tonelli [11] ha dimostrato il seguente

Teorema 4'. Se n=1, se esistono e sono continue su SxR le funzioni

$$L,\ L_x,\ L_u,\ L_{ux}$$

e se $L_u(t,x,\cdot)$ è strettamente crescente per ogni $(t,x)\in S$, allora vale la tesi del Teorema 4 e in più si ha per ogni soluzione $x(\cdot)$ del problema considerato

$$|\dot{x}(t)| \leq M + \varepsilon \qquad \text{per } a\leq t\leq b.$$

Corollario 4. Se $x(\cdot)$ è soluzione del problema (P) considerato nell'Introduzione e se L è localmente lipschitziana e strettamente convessa rispetto a v, per ogni τ in [a,b] verificante la condizione

$$\liminf_{\substack{s,t\to\infty \\ s\leq\tau\leq t \\ s\neq t}} \frac{|x(t)-x(s)|}{t-s} < \infty$$

esiste un intervallo I relativamente aperto in [a,b] tale che $\tau\in I$ e $x(\cdot)$ è di classe C^1 su I. Dunque $x(\cdot)\in C^1(\Omega)$ con Ω relativamente aperto in [a,b] e $\mu([a,b]\setminus\Omega) = 0$.

Per ottenere il Corollario 4 del Teorema 4 si prende una successione $i \to [a_i,b_i] \subset [a,b]$ tale che $[a_i,b_i]$ sia un intorno di τ aperto relativamente ad [a,b] e

$$b_i-a_i \to 0 \quad \text{per } i \to \infty,$$

$$|x(b_i)-x(a_i)| \leq M(b_i-a_i) \quad \text{per } i \geq 1,$$

per qualche costante $M < \infty$. Poi si applica il Teorema 4, con $t_0 = \tau$, $x_0=x(\tau)$, al problema

$$\min\{\int_{a_i}^{b_i} L(t,y,\dot{y})dt\,|\,y(\cdot) \text{ ass.cont}, \; y(a_i) = x(a_i),$$

$$y(b_i) = x(b_i),\; |y(t)-x(\tau)|\leq \delta \text{ per } a_i\leq t\leq b_i\},\; i\geq I_\eta,$$

con $\delta>0$ e I_0 opportuni.

Indichiamo i punti principali della dimostrazione del Teorema 4, seguendo [7].

I) Ci si riconduce al caso di

$$S = [t_0-\gamma,\ t_0+\gamma]x\{x|\ |x-x_0| \leq \gamma\}$$

e di L che verifica la condizione

$$L(t,x,v) \geq \alpha|v| \qquad \text{per } (t,x,s)\ SxR^n,$$

con $\gamma>0$ e $\alpha>0$ opportune.

II) Si utilizza la Proposizione 1 per costruire le funzioni

$$L_r: SxR^n \to R \quad , \quad r > 0,$$

che verificano le condizioni seguenti:

a) L_r verifica i) e ii);

b) $L_r(t,x,v) = L(t,x,v)$ per $|v|\leq r$,

c) $L_r(t,x,v) \geq \max\{\frac{\alpha}{2}|v|,|v|^2-r^2\}$;

d) esiste $\rho(r) > 0$ tale che

$$L_r(t,x,v) = |v|^2-r^2 \qquad \text{per } |v|\geq\rho(r).$$

Supposto

$$t_o-\gamma = a_o \leqq a < b \leqq b_o = t_o + \gamma,$$

$$|A-x_o| \leqq \gamma\ ,\ |B-x_o| \leqq \gamma,\ |B-A| \leqq M(b-a),$$

consideriamo il problema

(P_r)
$$\min\{\int_a^b L_r(t,y,\dot{y})dt \,|\, y(\cdot)\text{ass.cont.},\ y(a) = A,$$

$$y(b) = B,\ |y(t)-x_o| \leqq \gamma\}$$

Allora si ha il seguente

<u>Lemma 2.</u> Esistono $\varepsilon>0$, $r_o>0$ tali che, se

$$|a-t_o|<\varepsilon\ ,\ |b-t_o|<\varepsilon\ ,\ |A-x_o|<\varepsilon\ ,\ |B-x_o <\varepsilon,\ r\geqq r_o,$$

il problema (P_r) ha una soluzione $x_r(\cdot)\in C^1([a,b])$ per cui si ha

$$|\dot{x}_r(t)|<r_o,\ |x_r(t)-x_o|<\gamma \qquad \text{per } a\leqq t\leqq b,$$

$$L(t,x_r(t),\dot{x}_r(t))=L_r(t,x_r(t),\dot{x}_r(t)) \quad \text{per } a\leqq t\leqq b\,.$$

Da quanto detto sopra segue che

$$\int_a^b L(t,x_r,\dot{x}_r)dt = \int_a^b L(t,x_s,\dot{x}_s)dt \qquad \text{per } r,s\geqq r_o$$

e inoltre che, posto

$$z(t) = x_{r_o}(t), \qquad a\leqq t\leqq b,$$

se $y(\cdot)$ è una qualunque funzione *lipschitziana* tale che $y(a)=A, y(b)=B$, $|y(t)-x_0|\leq\gamma$, riesce

$$\int_a^b L(t,z;\dot{z})dt \leq \int_a^b L(t,y,\dot{y})dt.$$

III) Esistono delle costanti $r_1>0$, $\bar{\alpha}>\alpha$, $\delta>0$, β,λ e le funzioni $H_k:SxR^n\to R$, per $k > r_1$, localmente lipschitziane e strettamente convesse in v tali che

a) $H_k(t,x,v) = L(t,x,v)$ per $|v|\leq r_0$,

b) $H_k(t,x,v) \leq L(t,x,v) + \frac{1}{k}$ per $r_0\leq|v|\leq r_1$,

c) $H_k(t,x,s) \leq L(t,x,v)-\delta$ per $r_1\leq|v|\leq k$,

d) $H_k(t,x,v) \leq \beta|v|+\lambda$ per $|v|>k$,

e) $H_k(t,x,v) \geq \bar{\alpha}|v|$ su SxR^n.

Procedendo come nel punto II), si prova che esistono $\varepsilon>0$ e $r_0>0$ tali che, se a,b,A,B sono come nel Lemma 2, nella classe delle funzioni $y(\cdot):[a,b]\to R^n$ *lipschitziane* tali che

$$y(a) = A,\ y(b) = B\ ,\ |y(x)-x_0|<\gamma \quad \text{per } a\leq t\leq b$$

ne esiste una $z(\cdot)\in C^1([a,b])$ verificante le condizioni

$$|\dot{z}(t)| < r_0 \quad \text{per } a\leq t\leq b,$$

$$\int_a^b L(t,z,\dot{z})dt \leq \int_a^b H_k(t,y,\dot{y})dt \qquad \text{per ogni } y(\cdot),k.$$

Quest'ultima maggiorazione si estende a tutte le funzioni $y(\cdot)$ *assolutamente continue* verificanti le altre condizioni poste sopra su $y(\cdot)$ mediante il seguente

Lemma 3. Data $y(\cdot)$ assolutamente continua come sopra, esiste una successione di funzioni

$$y_i(\cdot):[a,b] \to R^n \quad , \quad i \in N,$$

lipschitziane tale che

$$\max_t |y_i(t)-y(t)| + \int_a^b |y_i(t)-y(t)|dt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

$$\int_a^b H_k(t,z_i,\dot{z}_i)dt \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_a^b H_k(t,y,\dot{y})dt.$$

IV) Se la funzione $y(\cdot)$ non è lipschitziana, l'insieme

$$W = \{t\in[a,b] \mid \ |\dot{y}(t)|>r_1\}$$

ha misura positiva.

Posto

$$T = \{t\in[a,b] \mid \ |\dot{y}(t)| \leq r_1\},$$

$$U_k = \{t\in[a,b] \mid \ r_1<|\dot{y}(t)| \leq k\},$$

$$V_k = \{t\in[a,b] \mid \ k<|\dot{y}(t)|\},$$

si ha

$$\int_a^b L(t,z,\dot{z})dt \le \int_a^b H_k(t,y,\dot{y})dt =$$

$$= \int_T H_k(t,y,\dot{y})dt + \int_{U_k} H_k(t,y,\dot{y})dt + \int_{V_k} H_k(t,y,\dot{y})dt \le$$

$$\le \int_T L(t,y,\dot{y})dt + \frac{1}{k}\mu(T) + \int_{U_k} L(t,y,\dot{y})dt - \delta\mu(U_k) +$$

$$+ \int_{V_k} (\lambda+\beta|y|)dt \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_a^b L(t,y,\dot{y})dt - \delta\mu(W)$$

Dunque si ha

$$\int_a^b L(t,z,\dot{z})dt \le \int_a^b L(t,y,\dot{y})dt - \delta\mu(W)$$

e questo prova che ogni soluzioni del problema considerato deve essere lipschitziana e ciò conclude la dimostrazione del Teorema 4.

4. Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1. Questo esempio è dovuto a Tonelli [10]. E' noto che il problema

$$\text{(P)} \qquad \min\{ \int_0^1 y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt \mid x(\cdot),y(\cdot) \text{ ass. continua,}$$

$$y(t)\ge 0 \text{ per } 0\le t\le 1,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ y(0)=h=y(1)\}$$

ha una unica soluzione, per $h>0$ abbastanza grande, data da

$$(*)\qquad \begin{cases} x_0(t) = t \\ y_0(t) = \alpha \cosh. \frac{1}{\alpha}(t - \frac{1}{2}) \end{cases} , \quad 0 \le t \le 1,$$

con $\alpha>0$ costante (cfr. [9]).

Fissiamo un nuovo sistema di coordinate cartesiane ortogonali (ξ,η) in modo che l'asse η sia parallelo alla retta tangente in $(1,h)$ alla curva (*).

Precisamente poniamo

$$\xi = \frac{y_0(1)x-y}{\sqrt{\dot{y}_0(1)^2+1}} \equiv ax - by,$$

$$\eta = \frac{x+\dot{y}_0(1)y}{\sqrt{\dot{y}_0(1)^2+1}} \equiv bx - ay.$$

Allora si ha $a^2 + b^2 = 1$ e

$$x = a\xi + b\eta,$$

$$y = -b\xi + a\eta$$

Poniamo anche

$$\xi_0 = -bh \ , \ \xi_1 = a-bh.$$

Nelle coordinate (ξ,η) la curva (*) è rappresentata da

$$\begin{cases} \xi = at - by_0(t) \\ \eta = bt + ay_0(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e la funzione

$$\phi(t) = at - by_0(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

è strettamente crescente e quindi invertibile con inversa

$$\psi : [\xi_0, \xi_1] \to [0,1].$$

Dunque la curva (*) è rappresentabile nella forma

$$y = b\psi(\xi) + ay_0(\psi(\xi)) \equiv \eta_0(\xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1,$$

e la funzione $\eta_0(\cdot)$ è continua per ogni ξ, è di classe C^∞ per $\xi_0 \leq \xi < \xi_1$ e verifica le condizioni

$$\dot{\eta}_0(\xi_1) = +\infty \quad , \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} |\dot{\eta}_0(\xi)| d\xi < \infty.$$

Consideriamo ora il problema

$$(P') \qquad \min\{ \int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi + a\eta(\xi)] \sqrt{1+\dot{\eta}(\xi)^2}\, d\xi \,|\, \eta(\cdot) \text{ ass. continua},$$

$$-b\xi + a\eta(\xi) \geq 0 \text{ per ogni } \xi, \ \eta(\xi_0) = \eta_0(\xi_0), \eta(\xi_1) = \eta_0(\xi_1)\}.$$

Si ha

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi+a\eta(\xi)] \sqrt{1+\dot{\eta}(\xi)^2}\, d\xi \;=\; (\xi = \phi(t))$$

$$= \int_0^1 [-b\phi(t)+a\eta(\phi(t))] \sqrt{1+\dot{\eta}(\phi(t))^2}\, \dot{\phi}(t)dt.$$

Se poniamo

$$y(t) = -b\phi(t) + a\eta(\phi(t)), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$
$$x(t) \leqq a\phi(t) + b\eta(\phi(t)),$$

otteniamo

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = [1+\dot{\eta}(\phi(t))^2]\dot{\phi}(t)^2,$$

e quindi, essendo $y(t) \geq 0$, $y(0) = h = y(1)$, $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$,

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi+a\eta(\xi)] \sqrt{1+\dot{\eta}(\xi)^2} d\xi = \int_0^1 y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\, dt \geq$$

$$\geq \int_0^1 y_0(t) \sqrt{1+\dot{y}_0(t)^2} dt = \int_{\xi_0}^{\xi_1} [-b\xi+a\eta_0(\;)] \sqrt{1+\dot{\eta}_0(\xi)^2}\, d\xi$$

pertanto $\eta_0(\cdot)$ è soluzione del problema (P') e si ha $\Omega = [\xi_0, \xi_1[$. Osserviamo che la lagrangiana del problema (P'), data da

$$L(\xi,\eta,\theta) = (-b\xi+a\eta) \sqrt{1+\theta^2},$$

verifica le ipotesi del Teorema 4 nell'aperto: $-b\xi+a\eta>0$, che contiene il grafico di $\eta_0(\cdot)$, poiché $L_{\theta\theta} = (-b\xi+a\eta)(1+\theta^2)^{-3/2}$.

<u>Esempio 2.</u> Può essere $\Omega\neq[a,b]$ anche nelle condizioni del Teorema 1. Un esempio, dovuto a Ball e Mizel [2], è dato da

$$L(t,x,u) = (t^2-x^3)^2\, u^{14} + \varepsilon u^2 \quad , \quad 0\leq t\leq 1.$$

E' possibile scegliere $\varepsilon>0$ e $k>0$ in modo che il problema

$$\min\{\int_0^1 L(t,x,\dot{x})dt \,|\, x(\cdot) \text{ ass. continua, } x(0) = 0,\ x(1)=k\}$$

abbia come unica soluzione la funzione

$$x(t) = kt^{2/3} \quad , \quad 0\leq t\leq 1.$$

La dimostrazione si trova in [2] e [4].

<u>Esempio 3.</u> Fissato a piacere Ω aperto in $[-1,1]$ con $\text{mis}([-1,1]\setminus\Omega)=0$, in [2] è costruito un esempio di problema

$$\min\{\int_{-1}^1 L(x,\dot{x})dt \,|\, x(\cdot) \text{ ass.continua, } x(-1)=k_1, x(1)=K_2\}$$

per il quale si ha $L\in C^\infty(R^2)$, $L_{uu} > 0$,

$$|u| \leq L(x,u) \leq C(1+u^2),$$

$$\frac{L(x,u)}{|u|} \xrightarrow[|u|\to\infty]{} \infty \quad \text{per quasi ogni } x\in R,$$

ed esiste una unica soluzione $x(\cdot)$ crescente strettamente e tale che

$\dot{x}(t) = +\infty \Leftrightarrow t \notin \Omega,$

$L_x(x(\cdot),\dot{x}(\cdot)) \notin L^1_{loc}(-1,1).$

Esempio 4. Poniamo

$$I(x) = \int_0^1 [(t^4-x(t)^6)^2|\dot{x}(t)|^s + \varepsilon\dot{x}(t)^2]dt$$

Per ogni $s \geq 27$ e $k>1$ esiste $\varepsilon>0$ tale che ogni soluzione (ne esistono) del problema

$$\min\{I(x)|x(0)=0\ ,\ x(1) = k,\ x(\cdot) \text{ ass.continua}\} = m$$

ha l'insieme $\Omega =]0,1]$. Si ha inoltre

$$m<\inf\{I(x)|x(0)=0,\ x(1)=k,\ x(\cdot) \text{ ass.continua},\ \dot{x}(\cdot)\in L^q(0,1)\}$$

per ogni q tale che $3 \leq q \leq +\infty$. Anche per questo rimandiamo a [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] J.P. AUBIN,A. CELLINA: Differential inclusions. Springer, 1984.

[2] J.M. BALL,V.J. MIZEL: One dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation. Arch. Rat. Mech. Anal. (1985), 325-88.

[3] L. CESARI: Optimization-theory and applications. Springer, 1983.

[4] F.H. CLARKE: Optimization and nonsmooth analysis. Wiley-Interscience, New York, 1983.

[5] F.H. CLARKE, R.B. VINTER: On the conditions unter which the Euler equation or the maximum principle hold. Appl. Math. Optim. 12 (1984), 73-79.

[6] F.H. CLARKE, R.B. VINTER: Regularity properties of solutions of the basic problem in the calculus of variations. Trans. A.M.S. 289 (1985), 73-98.

[7] F.H. CLARKE, R.B. VINTER: Existence and regularity in the small in the calculus of variations. Journal of Diff. Eq. 59(1985), 336-54.

[8] L. TONELLI: Sur une methode directe du calcul des variations. Rend. Circ. Math. Palermo 39 (1915), 233-64; oppure "Opere Scelte", vol. 2, Cremonese, Roma, 1961.

[9] L. TONELLI: Fondamenti di calcolo delle variazioni, Vol. I, II, Zanichelli, Bologna, 1921, 1923.

[10] L. TONELLI: Sulla proprietà delle estremanti. Annali Sc. Norm. Supp. Pisa, III (1934), 213-37; oppure "Opere Scelte", vol. III, Cremonese, Roma, 1962.

[11] L. TONELLI: Sulle equazioni di Eulero nel calcolo delle variazioni. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, IV (1935), 191-216; oppure "Opere Scelte", vol. III, Cremonese, Roma, 1962.